Chapitre I

Le champ électrique

1 Phénomènes électrostatique, notion de charge électrique

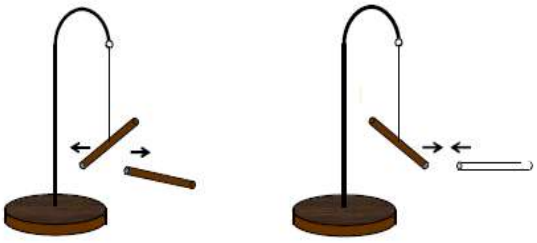
1.1 Des phénomènes électriques

N'importe quelle personne a déjà subi l'expérience désagréable d'une décharge électrique lors d'un contact avec la poignée de d'une porte ou en marchant sur un tapis, ou enlevant son pull… c'est un effet électrostatique, c'est à dire de l'électricité statique. Une autre manifestation de l'électricité statique consiste ne l'attraction des petits corps légers (bouts de papier par ex) avec des corps frottés (peigne ou règle en plastique)

De même, lorsqu'on frotte un ballon sur de la laine, et on le place ensuite contre un mur ou un plafond, on constate alors que le ballon y demeure fixé ; on dit alors que ce corps est électrisé, c'est-à-dire il devient porteur de charges électriques.

1.2 Expérience : Deux sortes de charges électriques

Prenons deux tiges en plastique et suspendons-une par un fil et frottons une de ses deux extrémités avec de la laine. Ensuite approchons l'autre tige après l'avoir frottée avec de la laine : les deux tiges se repoussent. Par contre, si l'on approche une tige en verre après l'avoir frottée avec de la soie : les deux tiges s'attirent.



Tout se passe donc comme si chacune des tiges était depuis son frottement, porteurs de deux sortes d'électricité (positive et négative), et que les corps portant une électricité de même nature (soit positive, soit négative) se repoussent, tandis qu'ils s'attirent s'ils portent des électricités contraires.

1.3 La charge électrique

Cette expérience nous montre également que cette électricité est capable, non seulement d'agir à distance (répulsion ou attraction), mais également de se déplacer d'un corps à un autre : il y'a échange d'électricité entre les tiges et les pièces d'étoffe lors des frottements).

Le fait qu'il soit nécessaire qu'il y ait un contact entre deux matériaux pour que l'électricité puisse passer de l'un à l'autre, semble indiquer que cette électricité est portée par de la matière.

On explique l'ensemble des effets d'électricité statique par l'existence, au sein de la matière de particules portant une charge électrique q positive ou négative et libres de se déplacer.

Dans le système d'unités internationales, l'unité de la charge électrique est le Coulomb (C).

1.4 Structure de la matière

La matière est constituée d'atomes qui sont eux-mêmes constitués d'un noyau autour duquel gravite une sorte de nuage composé d'électrons ayant une charge négative. Ces électrons se repoussent les uns les autres mais restent confinés autour du noyau car celui-ci possède une charge électrique positive qui les attire. On attribue cette charge positive à des particules appelées protons qui en général avec les neutrons constituent le noyau. Les neutrons portent une charge électrique nulle.

Ci-dessous, on donne les valeurs des charges électriques et des masses des constituants atomiques dans le Système International :

Electron : $q_e = -e = -1{,}602.10\text{-}19$ C et $m_e = 9{,}109.10^{-31}$ kg.

Proton : $q_p = +e = 1{,}602.10\text{-}19$ C et $m_p = 1{,}672.10^{-27}$ kg.

Neutron : $q_n = 0$ C et $m_n = 1{,}674.10^{-27}$ kg.

Un matériau est ainsi constitué d'un grand nombre de charges électriques, mais celles-ci sont toutes compensées (même nombre d'électrons et de protons). Aux températures usuelles, la matière est électriquement neutre. En conséquence, lorsque des effets d'électricité statique se produisent, cela signifie qu'il a eu un déplacement de charges, d'un matériau vers un autre : c'est ce que l'on appelle l'électrisation d'un corps. Ce sont ces charges en excès ou en manque qui sont responsables des effets électriques sur ce corps.

1.5 Conservation de la charge électrique

La charge électrique est toujours conservée, on ne peut pas la créer ni la détruire, l'électrisation est un transfert de charge d'un corps à un autre. Nous pouvons conclure que :

- Les charges de même signe se repoussent et les charges de signe contraire s'attirent.
- La charge est conservée

- La charge est quantifiée

2 Charge ponctuelle et distribution de charges

Une charge est dite ponctuelle lorsqu'on peut négliger les dimensions du corps qui la porte. Deux sortes de charges ponctuelles apparaissent :

1. Charge négative due à un excès d'un ou de plusieurs électrons dans le corps (manque de protons).
2. Charge positive due à un manque d'un ou de plusieurs électrons dans le corps (excès de protons).

Par contre, les corps chargés peuvent être classés selon la distribution de leurs charges : volumiquement, superficiellement, et linéairement.

2.1 Densité volumique de charge (ρ)

Lorsqu'un corps de volume V, porte une charge uniforme Q, on dit que sa charge est distribuée uniformément en volume. On définit la distribution (ou densité) volumique des charges (ρ) comme : $\boldsymbol{\rho = \frac{Q}{V}}$

Si la distribution de la charge n'est pas uniforme, alors, on définit la charge élémentaire dQ par : $\boldsymbol{dQ = \rho dV}$. Et la charge totale du corps sera donnée par : $\boldsymbol{Q = \iiint \rho dV}$

2.2 Densité surfacique de charge (σ)

C'est le ou la charge Q est distribuée sur la surface S d'un corps. Si la distribution est homogène, alors on définit la distribution (ou densité) superficielle des charges (σ) comme : $\boldsymbol{\sigma = \frac{Q}{S}}$,

Si la distribution de la charge n'est pas uniforme, alors, on définit la charge élémentaire dQ par : $\boldsymbol{dQ = \sigma dS}$ et la charge totale du corps sera donnée par : $\boldsymbol{Q = \iint \sigma dS}$

2.3 Densité linéaire de charge (λ)

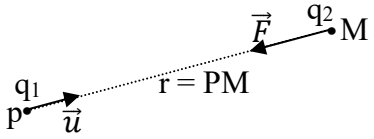
Lorsque la charge Q est répartie linéairement sur un corps de longueur L, et si la distribution est homogène, alors on définit la distribution (ou densité) linéaire des charges (λ), comme : $\boldsymbol{\lambda = \frac{Q}{L}}$

Si la distribution de la charge n'est pas uniforme, alors, on définit la charge élémentaire dQ par :$\boldsymbol{dQ = \lambda dS}$ Et la charge totale du corps sera donnée par : $\boldsymbol{Q = \int \lambda dl}$

3 Force électrostatique

3.1 La force de Coulomb

Les propriétés de la force électrostatique $\vec{F}$ exercée par une charge ponctuelle q_1 sur une autre charge ponctuelle q_2 sont :



- La force est radiale, c'est-à-dire dirigée selon la droite qui joint les deux charges ;
- La force est proportionnelle au produit des charges ; le sens de $\vec{F}$ dépond si q_1 et q_2 ont mêmes signes, ($\vec{F}$ est répulsive) ou de signes contarires ($\vec{F}$ est attractive).
- Le point d'application de la force est M,
- La force est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les deux charges

L'expression mathématique moderne de la force de Coulomb et traduisant les propriétés ci-dessous est la suivante : $\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}$

Ou k étant une constante multiplicative, sa valeur est 9.109 $N.m^2/C^2$; on l'écrit souvent sous la forme : $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

Avec ε_0 est la permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}8.10^{-12} C^2/N.m^2$.

L'expression devient : $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}$.

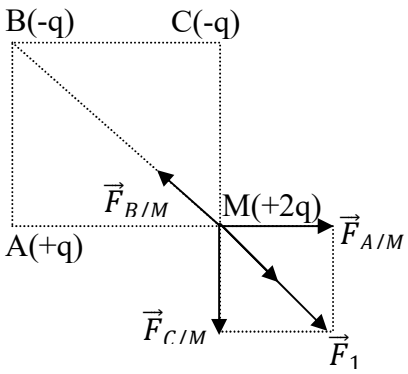
Remarques :

1. Cette expression n'est valable que pour des charges immobiles et dans le vide. Cette loi est la base même de toute l'électrostatique.
2. Cette force obéit au principe d'Action et de Réaction de la mécanique classique.
3. Cette loi a quasiment les mêmes propriétés vectorielles que la force de la gravitation (Loi de Newton).

3.2 Cas de plusieurs charges électriques

En présence d'un système formé de plusieurs charges q_1, q_2, … la force résultante s'exerçant sur n'importe quelle charge est égale à la somme vectorielle des forces exercées par les diverses autre charges du système, c'est le principe de superposition : $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_{21}} + \overrightarrow{F_{31}} + \overrightarrow{F_{41}} + \cdots$

Exemple : Calculer la force électrique $\vec{F}$ agissant sur la charge (+2q) placée au coin M d'un carré de coté a = 10 cm, de la part des trois charges placées aux trois coins A, B et C. On donne q = μC.



$\vec{R} = \vec{F} = \overrightarrow{F_{AM}} + \overrightarrow{F_{CM}} + \overrightarrow{F_{BM}}$

Soit $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_{AM}} + \overrightarrow{F_{CM}}$

$$F_{AM} = F_{CM} = k\frac{2q^2}{a^2}$$

$$F = \sqrt{F_{AM}^2 + F_{CM}^2} = F_{AM}\sqrt{2}$$

D'où $F_1 = k2\sqrt{2}\frac{q^2}{a^2}$

$$\left|\overrightarrow{F_{BM}}\right| = k\frac{2q^2}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} = k\frac{q^2}{a^2}$$

D'où, $\vec{F} = \vec{R} = \overrightarrow{F_{AM}} + \overrightarrow{F_{CM}} + \overrightarrow{F_{BM}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_{BM}}$

Ces deux forces ont la même direction mais de sens contraires :

$$F = R = F_1 - F_{BM} = k\frac{q^2}{a^2}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

$$F = 9.10^9.\frac{(10^{-6})^2}{(10^{-2})}(2,82 - 1)$$

F=1,645 N

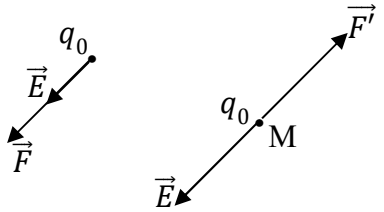
$\vec{R} = \vec{F}$ est portée sur l'axe BM, au point M dans le sens $\overrightarrow{BM}$.

4 Champ électrique

4.1 Définitions du champ électrique

Le vecteur champ électrique $\vec{E}$ en un point M de l'espace est défini par le quotient de la force électrique $\vec{F}$ agissant sur une charge ponctuelle test q_0 positive située en ce point, divisée par q_0 :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$



En remplaçant la charge test q_0 par d'autres charges ponctuelles $\boldsymbol{q'_0, q''_0}$…, on trouve, en ce même point :

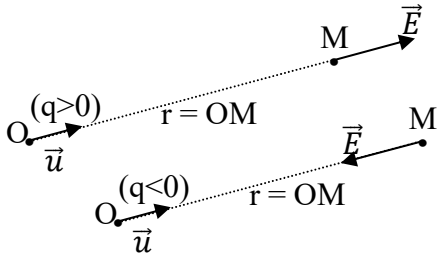
$$\frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{\vec{F\prime}}{q'_0} = .. = \boldsymbol{cte} = \vec{E}$$

$\vec{E}$ est dit champ électrique, c'est un champ qui ne dépend pas de la charge test q_0, c'est un champ extérieur à q_0 et non pas un champ produit par cette charge.

L'unité du champ électrique est le N/C.

4.2 Expression du champ électrique

Soit une charge ponctuelle q située en un point O à une distance r d'une charge test q_0. La force exercée entre ces deux charges :



$$\vec{F} = k\frac{qq_0}{r^2}\vec{u} \text{ Or } \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

On déduit que l'expression d'un champ électrique créé par une charge ponctuelle en un point M situé à une distance r, est donnée par : $\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\vec{u}$

$\vec{u}$ étant un vecteur unitaire dirigé du point O au point M.

Remarques :

1. $\vec{E}$ est une grandeur vectorielle : donc on peut lui appliquer le principe de la super position : $\vec{E} = \sum_i \overrightarrow{E_i}$ en un point donné.
2. Dans le cas de plusieurs charges ponctuelles, on doit d'abord calculer séparément chacune des vecteurs champs électriques créés par la distribution de charges, puis en appliquer le principe de superposition. En d'autres termes, le champ électrique total produit par un groupe de charges est égal à la somme vectorielle des champs électriques par toutes les charges en un point donné : $\vec{E} = \sum_i \overrightarrow{E_i}$
   a. Dans le cas d'une distribution de particules qi :

      $\vec{E} = k\sum_i \frac{q}{r_i^2}\vec{u}$ Avec $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

   b. Dans le cas d'une distribution linéaire de la charge électrique :

      $\vec{E} = \int d\vec{E}$ avec $d\vec{E} = \frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}$, ainsi $\vec{E} = k\int_{longueur} \frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}$

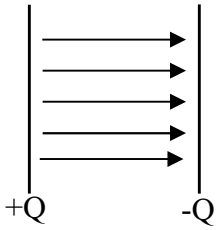
   c. Dans le cas d'une distribution en surface de la charge électrique :

$\vec{E} = \int \overrightarrow{dE}$, avec $\boldsymbol{d\vec{E} = k\frac{\sigma ds}{r^2}\vec{u}}$, ainsi $\boldsymbol{\vec{E} = k\iint_{surface}\frac{\sigma ds}{r^2}\vec{u}}$

d. Dans le cas d'une distribution en volume de la charge électrique

$\vec{E} = \int \overrightarrow{dE}$, avec $\boldsymbol{d\vec{E} = k\frac{\rho dv}{r^2}\vec{u}}$, ainsi $\boldsymbol{\vec{E} = k\iiint_{Volume}\frac{\rho dv}{r^2}\vec{u}}$

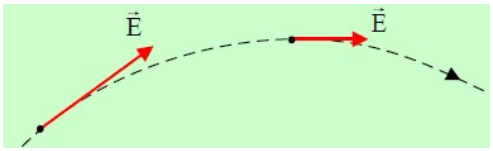
3. Le champ électrique $\boldsymbol{\vec{E}}$ créé dans l'espace entre deux zones chargées contrairement, est toujours dirigé de la charge positive vers la charge négative.



4. Le champ est dit uniforme dans un milieu quelconque, lorsqu'il conserve son intensité, sa direction et sons sens en tout point de ce milieu. Exemple : le champ $\boldsymbol{\vec{E}}$ qui régne dans l'espace d'un condensateur plan.

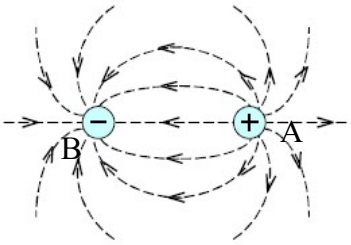
4.3 Lignes de champ électrique

Ce sont des lignes virtuelles telles qu'en chacun des points d'une ligne de champ le vecteur électrique est tangent à cette ligne.

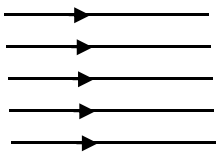


L'avantage de ces lignes est que, si on mène la tangente en un point donne sur la ligne, on obtient la direction et le sens du champ $\boldsymbol{\vec{E}}$.

Les lignes de champ sont rapprochées les une des autres lorsque le champ $\boldsymbol{E}$ est intense et distancées lorsque $\boldsymbol{E}$ est faible. On remarque que les lignes de champ convergent en un point B ayant une charge négative et divergent à partir d'un point A ayant une charge positive.



Dans le cas d'un champ uniforme les lignes de champ sont parallèles.



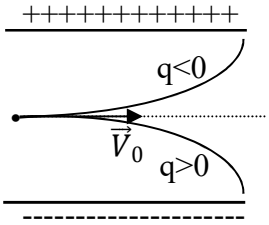
5 Mouvement de particules chargées dans un champ uniforme

Lorsqu'une particule de charge (q) est placée dans un champ électrique $\vec{E}$, elle subit une force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$. Si l'on néglige son poids $m\vec{g}$ devant $\vec{F}$, l'expression du principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}.$$

Dans le cas où $\vec{E}$ est uniforme, l'accélération $\vec{a}$ est donc constante. Si la particule part du repos, le mouvement est rectiligne et uniformement accélérée ou décélérée.

Si $\overrightarrow{V_0}$ fait un angle avec $\vec{E}$, alors la trajectoire est une branche de parabole.

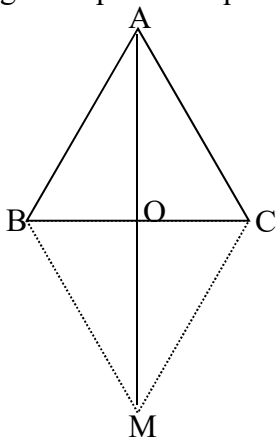


6 Applications

6.1 Champ électrique créé par un système de charges ponctuelles

ABC est un triangle équilatéral de coté a = 30 cm. On place en ces points les charges suivantes : $q_A = 2q$, $q_B = q_C = q = 10^{-9}C$

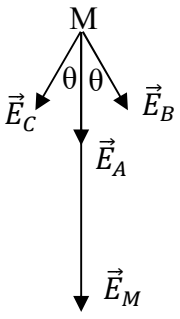
a. Calculer le champ électrique créé par ce système de charges au point M qui constitue le losange ABMC.



b. Où doit-on placer une charge q' = 2q pour obtenir un champ électrique nul en O, milieu de BC.

Le champ électrique est une grandeur vectorielle :

Or $\overrightarrow{E_M} = \overrightarrow{E_A} + \overrightarrow{E_B} + \overrightarrow{E_C}$



$$E_B = E_C = k\frac{q}{a^2}$$

$$E_M = E_A + E_B\cos\theta + E_C\cos\theta$$

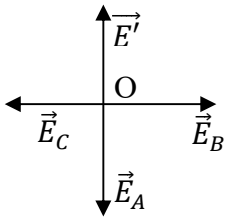
$$E_M = k\frac{2q}{(a\sqrt{3})^2} + k\frac{q\sqrt{3}}{a^2} = 2400\ V/m$$

Les caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{E_M}$ sont :

- Point d'application : M
- Direction : AM

- Sens : de A vers M, vers le bas
- Module 2400 V/m

1. Le champ électrique résultant doit être nul en O. Soit $\overrightarrow{E'}$ le champ électrique créé par la nouvelle charge.



$\overrightarrow{E_0} = \vec{0} = \overrightarrow{E_A} + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \overrightarrow{E'}$

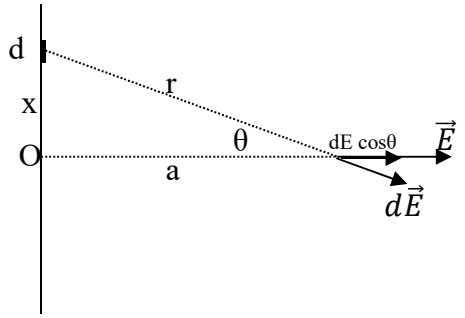
Or $\vec{E}_B + \vec{E}_C = \vec{0}$ au point O,

donc $\vec{E}_A + \overrightarrow{E'} = \vec{0}$ ➔ $\overrightarrow{E'} = -\vec{E}_A$ Mais q' = 2q ➔ q' doit être placée en M.

6.2 Champ produit par une distribution linéaire de charges électriques

Considérons un fil de longueur infinie ayant une densité de charge $\boldsymbol{\lambda}$ ($\boldsymbol{\lambda > 0}$) et calculons le champ créé par ce fil en un point M à une distance a du fil. Dans une position quelconque située à une distance x de O, on choisit un élément de longueur dx. La charge portée par dx est dq telle que : dq = λdx ; dq est considérée comme charge ponctuelle. Le champ élémentaire $\boldsymbol{d\vec{E}}$ créé par dq a pour valeur : $\boldsymbol{dE = k\frac{dq}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dx}{r^2}}$

En raison de la symétrie totale autour de l'axe OM ⊥ au fil, alors le vecteur champ électrique total $\vec{E}$ va etre perpendiculaire au fil.



Mais $\vec{E} = \int_{fil} d\vec{E}$ et en projetant cette relation suivant la perpendiculaire au fil, on obtient :

$$E = \int_{fil} dE\cos\theta$$

$$E = \int_{fil} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dx}{r^2}\cos\theta$$

La géométrie de la figure nous donne :

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow \quad r = \frac{a}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow dx = \frac{a}{cos^2\theta}d\theta$$

$$dEcos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{cos^2\theta}d\theta\ \frac{1}{\frac{a^2}{cos^2\theta}}\cos\theta\ ;\ dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cos\theta\, d\theta$$

Lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$, l'angle θ varie de $-\pi/2$ à $+\pi/2$

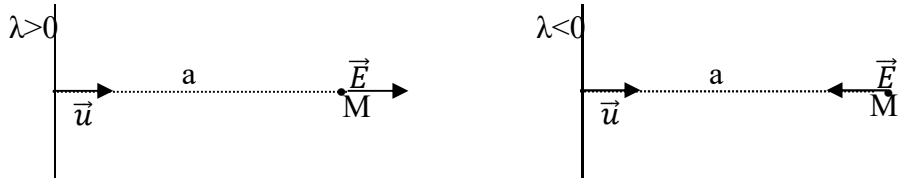
Le vecteur champ résultant $\vec{E}$ aura pour valeur :

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi a\varepsilon_0}\vec{u}$$

$\vec{u}$ est un vecteur unitaire porté par l'axe OM.

Les deux figures ci-dessous, montrent le cas où la distribution de charge est positive et où la distribution est négative.

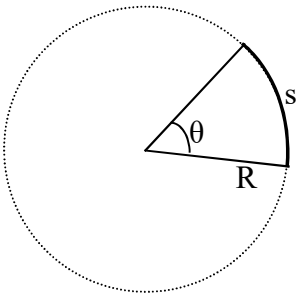


7 Flux du champ électrique

7.1 L'angle solide

L'angle solide est l'analogue dans l'espace (tridimensionnel) de l'angle plan (bidimensionnel). L'angle plan est le rapport de la longueur s de l'arc d'un cercle sur son rayon R, ou la longueur de l'arc d'un cercle de rayon unité. Dans le SI, l'unité de l'angle est le radian noté rd :

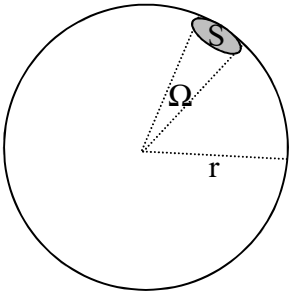
$$\theta = \frac{s}{R}$$



L'angle plan θ est l'angle sous lequel on voit du centre du cercle l'arc s.

L'angle solide, noté Ω, est le rapport de la surface S d'une partie de la surface d'une sphère sur son rayon au carré r^2 :

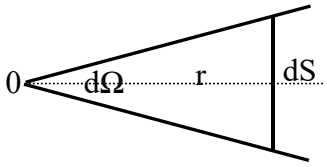
$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$



L'angle solide est aussi l'angle sous lequel on voit de O la surface S. Cet angle solide est toujours positif., son unité est le 'stéradian : sr'. L'angle solide mesure la surface sur laquelle un objet se projette radialement sur une sphère de rayon unité.

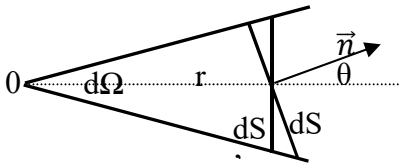
Considérons un cône d'angle au sommet dθ. Ce cône coupe une surface dS sur une sphère de rayon r et centré en son sommet 0. L'angle solide élémentaire dΩ de ce cône, est donné par :

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$



Considérons le cas d'une surface dS qui fait un angle θ avec l'axe du cône. La surface dS' est la projection de la surface dS sur la sphère de rayon r :

$$dS' = \frac{dS}{r^2}\cos\theta$$



Ainsi l'angle solide sous lequel on voit dS du point O est donné par : $d\Omega = \frac{dS}{r^2}\cos\theta$

7.2 Définition du flux

Par définition, le flux du champ électrique à travers une surface est une mesure du nombre de lignes de champ électrique traversant cette surface.

a- <u>Cas d'un champ électrique uniforme</u>

Considérons le cas où le champ électrique $\vec{E}$ est uniforme et la surface choisie S est plane et perpendiculaire aux lignes de champ. Le nombre de lignes qui traversent la surface S est proportionnel à E et à S donc au produit ES, pour cela on définit le flux ϕ de $\vec{E}$ à travers S comme étant :

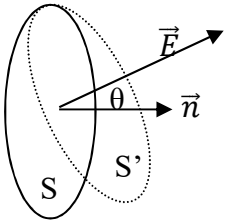
$$\phi = ES$$

Le flux ϕ s'exprime en Nm^2/C.

Si la surface est fermée, le nombre total de lignes qui la traversent est proportionnel à la charge totale qu'elle contient.

Si la surface n'est pas perpendiculaire au champ, le nombre de lignes qui la traversent diminue, du fait que la surface efficace diminue.

Soit θ l'angle entre la normale $\vec{n}$ à S et la direction de $\vec{E}$. La surface efficace S' perpendiculaire à $\vec{E}$ sera :



$$S' = S\ \cos\theta,$$

d'où : $$\phi = ES' = ES\cos\theta = \vec{E}.\vec{S}$$

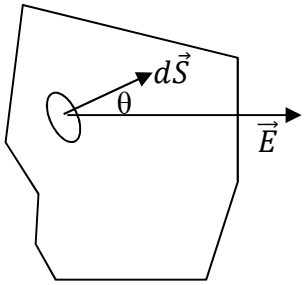
Avec $\vec{S} = S\vec{n}$ le vecteur surface.

Ainsi, le flux est maximal lorsque $\theta = 0$ et il est minimal pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

a- <u>Cas d'un champ électrique non uniforme</u>

Pour déterminer le flux du champ électrique $\vec{E}$ à travers une surface S quelconque, on choisit un élement de surface dS très petit : sur lequel, on peut considérer que $\vec{E}$ ne varie pas dans son voisinage immédiat. Le flux élémentaire $d\phi$ créé par $\vec{E}$ à travers dS sera :

$$d\phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS} => d\phi = E\ dS\ \cos\theta$$

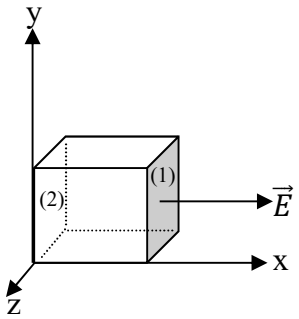


Le flux total à travers S est alors la somme de tous les flux élémentaires $d\phi$ obtenus en découpant S en éléments dS sera : $$\phi = \int_S d\phi = \int_S \vec{E}.\overrightarrow{dS}$$

Lorsque la surface S est fermée et $\vec{E}$ est uniforme dans le volume engendré par S, le flux à travers S sera nul.

<u>Exemple :</u>

Soit $\vec{E}$ un champ orienté suivant x'x. Calculer ϕ le flux total de $\vec{E}$ à travers le cube d'arête l



<u>Solution :</u>

Le flux total est obtenu en effectuant la somme des flux traversant chacun des cotés du cube.

Le flux de $\vec{E}$ à travers quatre cotés du cube est nul car $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}$ sur chacune de ces surfaces

Considérons les côtés et parallèles au plan yoz, le flux traversant ces cotés est donné par :

$$\phi = \int_{S1} \vec{E}.\overrightarrow{dS_1} + \int_{S2} \vec{E}.\overrightarrow{dS_2}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \int \boldsymbol{EdS}\cos\mathbf{0} + \int \boldsymbol{EdS}\cos\boldsymbol{\pi}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{ES} + \boldsymbol{ES}(-\mathbf{1})=0$$

Par conséquent le flux total à travers tous les cotés est donc nul.

Remarque : le vecteur unitaire normal $\vec{\boldsymbol{n}}$ en un point d'une surface fermée est toujours orienté de l'intérieur vers l'extérieur de la surface fermée.

7.3 Flux créé par une charge ponctuelle à travers une surface S

Choisissons une surface élémentaire dS de cette surface qui se trouve à une distance r de q. le flux élémentaire $\boldsymbol{d\phi}$ créé par $\vec{\boldsymbol{E}}$ à travers dS est donné par :

$$\boldsymbol{d\phi} = \vec{\boldsymbol{E}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dS}}$$

$$\boldsymbol{d\phi} = \vec{\boldsymbol{E}}.\vec{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{dS}$$

$$\boldsymbol{d\phi} = \boldsymbol{EdS}\cos\boldsymbol{\theta}=\text{EdS'}$$

Par convention, on oriente le vecteur unitaire $\vec{\boldsymbol{n}}$, normal à la surface dS, vers l'extérieur, c'est-à-dire dans la direction qui s'éloigne de la charge q. Ainsi, pour q>0, le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ est dirigé dans le même sens que $\vec{\boldsymbol{n}}$ et l'on obtient un flux positif.

Mais $\boldsymbol{E} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{r^2}}$, ainsi le flux élémentaire s'exprime par :

$$\boldsymbol{d\phi} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{r^2}}\boldsymbol{dS}\cos\boldsymbol{\theta}$$

Vu que l'angle solide dΩ est donné par : $\boldsymbol{d\Omega} = \frac{\boldsymbol{dS}}{\boldsymbol{r^2}}\cos\boldsymbol{\theta}$ alors :

$$\boldsymbol{d\phi} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}}\boldsymbol{q}\boldsymbol{d\Omega}$$

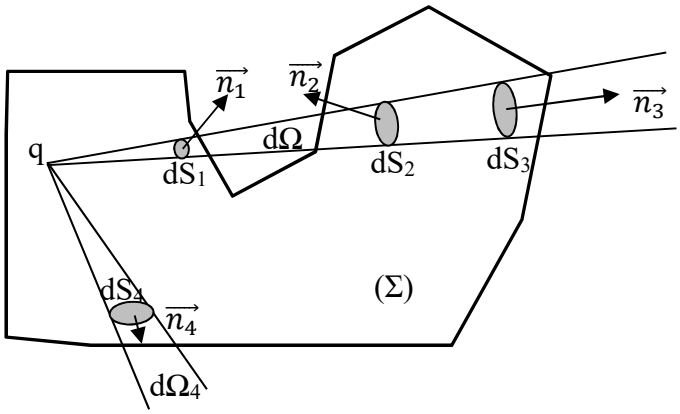
C'est-à-dire un flux dépendant directement de l'angle solide sous lequel est vue la surface et non pas de sa distance r.

8 Théorème de Gauss

Considérons une charge ponctuelle placée à l'intérieur d'une surface fermée **Σ**. Le flux élémentaire du champ électrqiue créé par q à travers une surface élémentaire dS est donné par :

$$\boldsymbol{d\phi} = \frac{\boldsymbol{q}}{\mathbf{4}\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}}\boldsymbol{d\Omega}$$

Où dΩ est l'angle solide sous lequel on voit dS à partir de q. Intéressons-nous au flux total à travers la surface fermée **Σ** ci-dessous. Le vecteur unitaire normal est dirigé vers l'extérieur.



A travers ds_4, on a simplement : $\boldsymbol{d\phi_4 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega_4}$, le champ éléctrique sort de **Σ**.

A travers ds_1, on a simplement : $\boldsymbol{d\phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega_1}$, le champ éléctrique sort de **Σ**.

A travers ds_2 on a simplement : $\boldsymbol{d\phi_2 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega_4}$, le champ éléctrique pénétre de **Σ**.

A travers ds_4, on a simplement : $\boldsymbol{d\phi_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega_4}$, le champ éléctrique sort de **Σ**.

En intégrant alors sur toutes les directions (c'est-à-dire sur les 4πΩ stéradians), on obtient un flux total : $\boldsymbol{\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}}$

En vertu du principe de superposition, ce résultat se généralise aisément à un ensemble quelconque de charges.

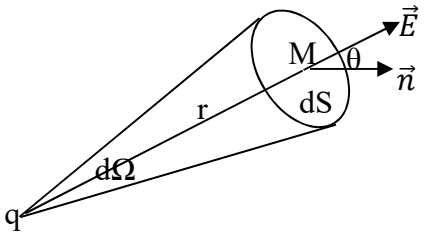
Théorème de Gauss : le flux du champ électrique à travers une surface fermée orientée quelconque est égal, dans le vide, à la somme algébrique des charges à l'intérieur de cette surface divisée par ε_0 : $\boldsymbol{\phi = \int_{\Sigma} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}}$

Le théorème de Gauss fournit une méthode très utile pour calculer le champ électrique lorsque celui-ci possède des propriétés de symétrie particulières. Celles-ci doivent en effet permettre de calculer facilement le flux $\boldsymbol{\phi}$. Comme le théorème de Gauss est valable pour une surface quelconque, il nous suffit de trouver une surface **Σ** adaptée, c'est-à-dire respectant les propriétés de symétrie du champ (comme le cas de sphères, cylindres et des surfaces planes ayant des distributions de charge uniforme) appelée surface de Gauss.

9 Applications

9.1 Cas d'une charge ponctuelle

Soit q une charge ponctuelle positive, elle crée en un point M à une distance r le champ $\vec{E}$ tel que :



$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}$$

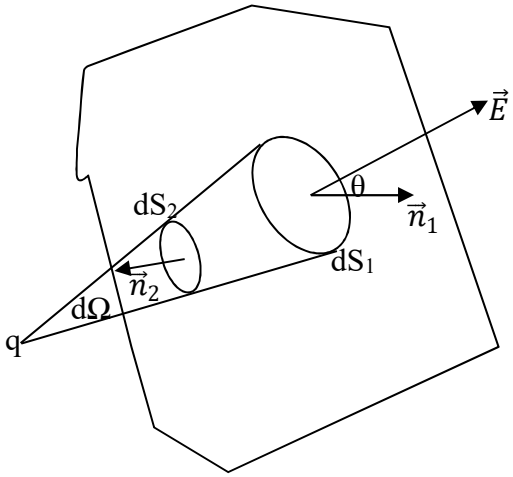
Le flux $d\phi$ à travers la surface élémentaire dS : $\mathbf{d\phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS} = EdS\cos\theta}$

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS\cos\theta}{r^2} \Rightarrow d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

$d\Omega$ étant l'angle solide sous lequel on voit dS à partir du point où se trouve la charge q, $d\Omega$ est sans dimensions : $$\phi = \int d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega$$

Or, $\int_S d\Omega = \int \frac{4\pi r^2}{r^2} \Rightarrow \Omega = 4\pi$ $st\acute{e}radians$, $\Omega = 4\pi$ représente l'angle solide à travers tout l'espace. D'où : $$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times 4\pi \Rightarrow \phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Notons que lorsque q se trouve à l'extérieur de la surface choisie S, l'angle solide dΩ découpe un nombre pair de fois et les flux sortant à travers ces surfaces sont égaux en valeur absolue mais de signe contraire. Le flux total à travers S et provenant de la charge q est donc nul :



$$\phi_S = 0$$

9.2 Champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé

On considère un plan infini **Π** portant une charge électrique uniforme de densité superficielle uniforme σ. Pour utiliser Gauss, il nous faut d'abord connaitre les propriétés de symétrie du champ électrique $\vec{E}$. Toutes les droites perpendiculaires du plan infini sont des axes de symetrie de celui-ci : $\vec{E}$ appartient à ces axes de symétrie, il est donc perpendiculaire au plan chargé. Etant donné ces propriétés de symétrie, la surface de Gauss **Σ** la plus adaptée est un cylindre de sections parallèles au plan et situées à des distances égales et de part et d'autre du plan **Π**.

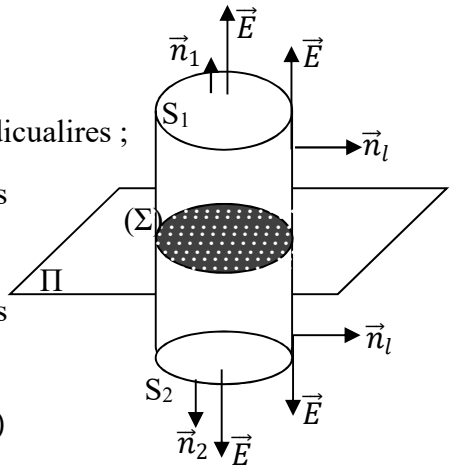
Le flux total à travers est égal à la somme des flux :

A travers la surface latérale : $\boldsymbol{\theta_l = 0}$, car $\vec{\boldsymbol{E}}$ et $\vec{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{l}}$ sont perpendicualires ;

A travers la surface S1 : $\boldsymbol{\theta_1 = ES_1}$, car $\vec{\boldsymbol{E}}$ et $\vec{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{1}}$ sont parallèles et de même sens ;

A travers la surface S2 : $\boldsymbol{\theta_2 = ES_2}$, car $\vec{\boldsymbol{E}}$ et $\vec{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{2}}$ sont parallèles et de même sens ;

Donc le flux total à travers **Σ** vaut : $\boldsymbol{\phi = 2ES}$ $\boldsymbol{(S_1 = S_2 = S)}$



D'après le théorème de Gauss : $\boldsymbol{\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}}$, avec $\boldsymbol{q = \sigma S}$ la charge à l'intérieur du cylindre de Gauss. Ainsi : $\boldsymbol{2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}}$

Il s'ensuit que le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé vaut :

$$\boldsymbol{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

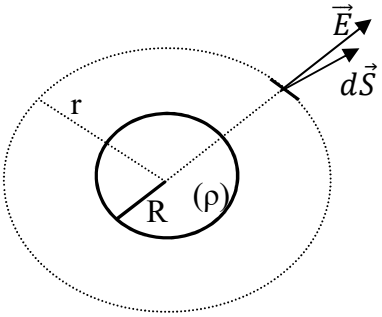
Remarques :

- Le champ ne varie pas avec la distance, ce qui est naturel car le plan est supposé infini.
- On peut encore appliquer ce résultat pour une surface quelconque chargée uniformément. Il suffit alors d'interpréter $\vec{\boldsymbol{E}}$ comme le champ au voisinage immédiat de la surface, suffisament près, celle-ci peut etre assimilée à un plan infini.

9.3 Champ électrique d'une distribution de charge à symétrie sphérique

Considérons une sphère de rayon R et de densité volumique de charge uniforme $\boldsymbol{\rho}$ $\boldsymbol{(\rho > 0)}$. Nous allons calculer le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ en un point à l'extérieur, pour r>R.

A cause de la symétrie sphérique, la surface de Gauss **Σ** choisie est une sphère de rayon r (r>R), de même centre que la sphère considérée.



A cause de la symétrie sphérique, $\vec{\boldsymbol{E}}$ a une valeur constante sur la sphère de Gauss **Σ :** $\boldsymbol{\phi = \int \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}}$

$\boldsymbol{d\vec{S}}$ est choisie sur la sphère de Gauss $\boldsymbol{\Sigma : \vec{E}.d\vec{S} = EdS\cos\theta}$

Or θ=0 car $\vec{\boldsymbol{E}}$ est radial, il est donc paralléle à $\boldsymbol{d\vec{S}}$: $\boldsymbol{\vec{E}.d\vec{S} = EdS}$

Comme la valeur E est constante sur la sphère de Gauss :

$$\boldsymbol{\phi = E\int dS = \frac{q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{q_i}{\varepsilon_0}}$$

Or qi est la somme de toutes les charges à l'intérieur de la surface de Gauss, qui sont içi localisées sur la sphère de rayon R, alors :

$$q_i = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = K\frac{q}{r^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{u} = K\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

Notons que ce résultat est identique au résultat obtenu dans le cas d'une charge ponctuelle. Par conséquent, nous pouvons conclure que dans le cas d'une sphère ayant une distribution de charge uniforme, le champ en un point situé à l'extérieur de la sphère est équivalent au champ produit par une charge ponctuelle, de même valeur que celle de la distribution, située au centre de cette sphère.